Завдання IX обласного турніру юних математиків

1. Квадрат розміром 8×8 пофарбовано у білий колір. Дозволяється обирати у ньому довільний прямокутник із трьох клітинок та перефарбовувати його білі клітинки у чорний колір, чорні – у білий. Чи можна за декілька таких операцій перефарбувати весь квадрат у чорний колір?
2. Випробування автомобіля показали, що шини на колесах повністю зношуються через 36, 45, 54 або 60 тисяч кілометрів у залежності від їх розміщення (шини є однаковими, підчас випробувань їх місцями не міняли). Чи вдасться, маючи 4 нові шини, проїхати 48 тисяч кілометрів, якщо при цьому дозволяється переставляти шини довільним чином?
3. Миколка та Андрійко грають у таку гру. Спочатку Миколка на свій розсуд записує на дошці 2013 непарних простих чисел (записані ним числа можуть і повторюватися). Після цього Андрійко витирає будь-яку кількість чисел, записаних Миколкою. Далі гравці по черзі (починає Миколка) виконують такі дії: гравець обирає довільну кількість простих чисел $p_1,...,p_n$, які залишилися, витирає їх, а замість них записує всі прості дільники числа $p_1\cdot...\cdot p_n-2.$ Наприклад, якщо обрані числа 5, 13, то замість них будуть записані числа 3, 3, 7, а якщо обране лише одне число 3, то після його витирання не буде записано жодного числа, бо $3-2=1$ простих дільників не має. Програє той гравець, після ходу якого на дошці не залишиться жодного числа. У котрого з гравців є виграшна стратегія? Опишіть цю стратегію.
4. Дослідіть, скінченною чи нескінченною є множина пар цілих чисел $(a,b),$ для яких серед дійсних коренів рівняння $x^{2013}=ax+b$ знайдуться такі два корені, добуток яких дорівнює 1.
5. Доведіть, що число $\sqrt{\underbrace{4...4}_{2012}\underbrace{5...5}_{2014}-\underbrace{6...6}_{2013}}$ є натуральним і обчисліть його.
6. Розв’яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x^5-20y^3+13z=0, \\ y^5-20z^3+13x=0, \\ z^5-20x^3+13y=0. \end{cases}$
7. Дослідіть, якого найменшого значення набуває вираз $\dfrac{ab}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ для додатних a та b.
8. Знайдіть всі натуральні значення $n,$ для яких $3^n+5^n+7^n$ ділиться на $3^{n-1}+5^{n-1}+7^{n-1}.$
9. Довжини сторін трикутника $ABC,$ один з кутів якого дорівнює 48°, задовольняють співвідношення $(a-c)(a+c)^2+bc(a+c)=ab^2.$ Запишіть у градусах величини двох інших кутів цього трикутника.
10. У чотирикутнику $ABCD$ зі сторонами $AB=BC=CD$ точки M та N є відповідно серединами діагоналей AC та $BD,$ а точка E на стороні $BC-$ основа перпендикуляра, опущеного з точки O перетину діагоналей на цю сторону. Доведіть, що $EO-$ бісектриса кута MEN.
11. Задано многочлен $Q(x)$ третього степеня з дійсними коефіцієнтами і набір дійсних чисел $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\lambda_4.$ Спростіть вираз $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{4}a_iQ(x+\lambda_i),$ де $a_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}(\lambda_i-\lambda_j)^{-1}, 1\le i\le 4.$
12. Дослідіть, чи існують такі многочлени $P(x)$ та $Q(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для деяких дійсних чисел a та b і для всіх дійсних чисел x виконуються рівності:
    а) $P(x+x^2)=x+x^2+...+x^{2013}+x^{2014};$
    б) $Q(x+x^2+x^3)=x+x^2+x^3+...+x^{2010}+ax^{2011}+bx^{2012}+x^{2013}.$

13. 2027 піратів знайшли скарб, що складався з однакових золотих монет, і вирішили розподілити його між собою, визначивши жеребкуванням порядок, за яким вони підходитимуть до скрині зі скарбом. У встановленій послідовності пірати один за одним підходили до скрині, і кожен з них брав собі одну монету й після цього ще 2013-ту частину від решти монет. Коли в такий спосіб узяв свою долю останній з піратів, то з'ясувалось, що залишилась певна кількість монет, яку пірати змогли розділити між собою порівну. Знайдіть найменшу кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ був би можливим.

14. Нехай $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_k$ – алфавіт дикунів племені Мумбо, а $b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_m$ – алфавіт дикунів племені Юмбо (запис «$x \prec y$» означає, що літера x передує літері y). Ці алфавіти (позначимо їх через A і B відповідно) не мають жодної спільної літери. Обидва племені вирішили об'єднатись та створити нову мову. Словом мови племені Мумбо-Юмбо вважатиметься послідовність літер $c_1c_2...c_n$, $c_i \in A \bigcup B, 1 \le i \le n,$ яка задовольняє такі чотири умови:

а) якщо для $i < j$, $c_i \in A$ і $c_j \in A$, то $c_i \prec c_j$ або $c_i = c_j$;

б) якщо для $i < j$, $c_i \in B$ і $c_j \in B$, то $c_i \prec c_j$ або $c_i = c_j$;

в) $c_i \ne c_{i+1}$ для всіх i, $1 \le i \le n-1$;

г) $c_i \ne c_{i+2}$ для всіх i, $1 \le i \le n-2$.

Яку найбільшу довжину можуть мати слова нової мови?

15. Дано коло ω, на якому позначаються точки A, B і C. Нехай BF і CE – висоти трикутника ABC, M – середина сторони AC. Знайдіть геометричне місце точок перетину прямих BF і ME для всіляких положень точки A на колі ω.

16. Знайдіть усі такі прості числа p, для яких $37p^2 - 47p + 4$ є квадратом натурального числа.

17. Числовий автомат «ТЮМ» може виконувати такі операції з натуральними числами:

1) відняти від даного числа 3 (якщо воно більше за 3);
2) помножити дане число на 3;
3) розділити дане число на 3 (якщо воно ділиться на 3 без остачі).

Дослідіть, за яку найменшу кількість операцій можна з числа 82 отримати число 81. А з числа 81 – число 82?

18. Знайдіть усі $k \in Z$, для кожного з яких існує такий многочлен від трьох змінних $P(u, v, w)$ з дійсними коефіцієнтами, що для всіх $x \in R$ і $y \in R$ виконується рівність

$$\cos(20x + 13y) = P\left(\cos x, \cos y, \cos(x + ky)\right).$$

19. Визначте, яку найбільшу кількість кіл одиничного радіуса можна розташувати на площині так, щоб виконувались такі дві умови: *а*) відстань між центрами будь-яких двох кіл не більша за 10; *б*) для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл – по інший.

20. Для $n = 2$ та $n = 3$ і додатних чисел $a_1, \ldots, a_n$ таких, що $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, знайдіть найбільше значення виразу

$$\frac{\sqrt{a_1^2 + 1} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + 1}}{a_1 + \ldots + a_n}.$$

Примітка. При підготовці доповіді звернути увагу на:

- аналіз моделі та етапів розв'язування задачі;
- методи реалізації цих етапів;
- безпосереднє розв'язування задачі;
- висновки та узагальнення.