

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
 Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка
 Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2010-2011 рік

1 тур

11 клас

1. Розв'язати рівняння $[x^2] - 2x + 1 = 0$, де через $[x^2]$ позначено найбільше ціле число, що не перевищує x^2 .

2. Знайдіть усі натуральні числа a і b , різниця яких дорівнює 2011, а добуток – точний квадрат натурального числа.

3. Є 2012 куп камінців. Перша з них містить 2^0 камінців, друга містить 2^1 камінців, третя – 2^2 камінців, і так далі. 2012 купка містить 2^{2011} камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та додати у першу 2 камінці, у другу – 3, у третю – 4 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з першої купки 2 камінці, з другої – 3, з третьої – 4 камінці, при умові, що у обраних купках є достатня кількість камінців.

Чи можна за скінченну кількість ходів одержати ситуацію, при якій у кожній купці знаходиться рівно по 3^{1005} камінців?

4.1. Всередині паралелограма $ABCD$ розташовані кола γ_1 та γ_2 , які дотикаються зовнішнім чином у точці K . Коло γ_1 дотикається до сторін AD та AB паралелограма, а коло γ_2 дотикається до сторін CD та CB . Доведіть, що точка K лежить на діагоналі AC паралелограма.

5.1. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які задовольняють такі дві умови:

1) для усіх дійсних чисел x, y виконується рівність

$$f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y).$$

2) $f(x) \geq 0$ для усіх дійсних x .

22 січня 2011 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
 Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації,
 а також будь-якими електронними засобами забороняється**
**Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені
 на сайті www.matholymp.org.ua**