

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
 Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка  
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
 Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2010-2011 рік

1 тур

10 клас

1. Олеся записує в кожній вершині правильної трикутної призми одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Андрійко записує на кожному ребрі число, що є сумою чисел, записаних Олесею на кінцях цього ребра. Чи може Олеся записати числа так, щоб усі числа, які запише Андрійко, виявились різними?

2. Відомо, що  $x_1, x_2, x_3$  – попарно різні дійсні числа.

а) Числа  $x_2, x_3$  є нулями функції  $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$ ; числа  $x_3, x_1$  є нулями функції  $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ ; числа  $x_1, x_2$  є нулями функції  $f_3(x) = x^2 + p_3x + q_3$ . Чи обов'язково функція  $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$  має нулі?

б) Числа  $x_2, x_3$  є нулями функції  $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ; числа  $x_3, x_1$  є нулями функції  $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ ; числа  $x_1, x_2$  є нулями функції  $f_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$ . Чи обов'язково функція  $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$  має нулі?

3. На площині нарисована трапеція  $ABCD$  з основами  $BC = a$  та  $AD = 2a$ . Користуючись лише лінійкою, побудуйте трикутник, площа якого дорівнює площі трапеції.

За допомогою лінійки можна проводити прямі через дві відомі точки.

4.1. Числа  $a_1, a_2, \dots, a_{11}$  та  $b_1, b_2, \dots, b_{11}$  є перестановками чисел  $1, 2, \dots, 11$ . Доведіть, що серед 11 числа  $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_{11}b_{11}$  принаймні два мають однакову остачу при діленні на 11.

5.1. Для невід'ємних чисел  $a, b, c$ , сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність

$$ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \leq 6.$$

Чи може в цій нерівності досягатись рівність?

22 січня 2011 р.

На виконання завдання відводиться 4 години  
 Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації,  
 а також будь-якими електронними засобами забороняється  
 Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені  
 на сайті [www.matholymp.org.ua](http://www.matholymp.org.ua)**