

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2010-2011 рік

1 тур

10 клас

1. Олеся записує в кожній вершині правильної трикутної призми одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Андрійко записує на кожному ребрі число, що є сумою чисел, записаних Олесею на кінцях цього ребра. Чи може Олеся записати числа так, щоб усі числа, які запише Андрійко, виявились різними?

2. Відомо, що x_1, x_2, x_3 – попарно різні дійсні числа.

а) Числа x_2, x_3 є нулями функції $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$; числа x_3, x_1 є нулями функції $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$; числа x_1, x_2 є нулями функції $f_3(x) = x^2 + p_3x + q_3$. Чи обов'язково функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ має нулі?

б) Числа x_2, x_3 є нулями функції $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$; числа x_3, x_1 є нулями функції $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$; числа x_1, x_2 є нулями функції $f_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$. Чи обов'язково функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ має нулі?

3. На площині нарисована трапеція $ABCD$ з основами $BC = a$ та $AD = 2a$. Користуючись лише лінійкою, побудуйте трикутник, площа якого дорівнює площі трапеції.

За допомогою лінійки можна проводити прямі через дві відомі точки.

4. Задане число $n = 11^{2011} \cdot 2011^{11}$. Скільки існує натуральних дільників числа n^2 , які менші від n , але не є дільниками n ?

5.1. Для невід'ємних чисел a, b, c , сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність

$$ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \leq 6.$$

Чи може в цій нерівності досягатись рівність?

22 січня 2011 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації,
а також будь-якими електронними засобами забороняється
Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені
на сайті www.matholymp.org.ua**