

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
 Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка
 Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2010-2011 рік

1 тур

9 клас

1. Знайдіть усі значення параметра b , при яких для кожного x принаймні одна з функцій $f_1(x) = x^2 + 2011x + b$ чи $f_2(x) = x^2 - 2011x + b$ приймає додатне значення.

2. Доведіть, що існує нескінченна кількість квадратів натуральних чисел, які можна подати у вигляді $2^n + 2^m$, де n, m – деякі різні натуральні числа.

3. У волейбольній першості 8 команд грають в одне коло, кожна з кожною рівно 1 раз. За перемогу нараховується 1 очко, за поразку – 0 очок, нічий у волейболі не буває. Якщо по завершенню турніру різниця очок команд, що посіли перше та друге місця, не перевищує 1 очка, між командами проводиться стикова гра. За аналогічних умов стикові ігри проводяться між командами, що посіли 3-є та 4-е, 5-е та 6-е, а також 7-е та 8-е місця. Таким чином максимум може буде проведено 4 стикові гри. Яка найменша кількість стикових ігор може буде проведена по завершенню турніру?

Зауваження. По завершенню турніру при будь-яких результатах кожне місце займає рівно одна команда. Навіть якщо у декількох команд рівна кількість очок, вони займають різні місця.

4. Нехай $ABCD$ – вписаний чотирикутник. Позначимо середини сторін AB, BC, CD та DA через M, L, N та K відповідно. Виявилось, що $\angle BMN = \angle MNC$. Доведіть, що:

а) $\angle DKL = \angle CLK$;

б) у чотирикутнику $ABCD$ є пара паралельних сторін.

5.1. Для невід'ємних чисел a, b, c , сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність

$$ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \leq 8.$$

Чи може в цій нерівності досягатись рівність?

22 січня 2011 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
 Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації,
 а також будь-якими електронними засобами забороняється**
**Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені
 на сайті www.matholymp.org.ua**