Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2010-2011 рік

2 тур

10 клас

1. Сума декількох послідовних натуральних чисел (більше одного) дорівнює 2011. Знайдіть усі такі набори послідовних натуральних чисел.

2. Послідовність (a_n) визначається такими умовами:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1})$$

для кожного натурального n. На скільки нулів закінчується число a_{2011}?

3. На столі лежать цукерки. За один хід Петрик може забрати зі столу кілька з них. Першим ходом він забирає рівно одну цукерку, а кожного наступного ходу може забрати або стільки ж цукерок, як під час попереднього ходу, або вдвічі більше. За яку найменшу кількість ходів Петрик зможе забрати зі столу рівно 2011 цукерок?

4. У двох колах, що дотикаються зовнішнім чином в точці C, провели співнапрямлені діаметри A_1A_2, B_1B_2 (тобто чотирикутник $A_1B_1B_2A_2$ є трапецією з основами A_1A_2 та B_1B_2 або паралелограмом). Коло з центром на спільній внутрішній дотичній до данних двох проходить через точку перетину прямих A_1B_2, A_2B_1, а також перетинає їх у точках M, N. Доведіть, що пряма MN перпендикулярна паралельним діаметрам A_1A_2, B_1B_2.

5.1. Відомо, що для двох натуральних чисел m, n виконується рівність:

$$m + n = [m, n] + (m, n),$$

де через $[m, n]$ та (m, n) відповідно позначені найменше спільне кратне та найбільший спільний дільник чисел m, n.

Доведіть, що одне з чисел m, n кратне іншому.

30 січня 2011 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації, а також будь-якими електронними засобами забороняється
Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені на сайті www.matholymp.org.ua