Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2010-2011 рік

2 тур

11 клас

1. При якому найменшому натуральному n вираз $n^3 + n^2 + 330n + 330$ ділиться націло на 2001?

2. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 \geq 3\left(1 + a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{c} + c\sqrt[3]{a}\right).$$

3. На столі лежать цукерки. За один хід Петрик може забрати зі столу кілька з них. Першим ходом він забирає рівно одну цукерку, а кожного наступного ходу може забрати або стільки ж цукерок, як під час попереднього ходу, або вдвічі більше. За яку найменшу кількість ходів Петрик зможе забрати зі столу рівно 2011 цукерок?

4. У трьох колах, що попарно дотикаються зовнішнім чином, провели співнапрямлені діаметри A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (тобто кожен з чотирикутників $A_1B_1B_2A_2$ та $A_1C_1C_2A_2$ є паралелограмом або трапецією, у якої відрізок A_1A_2 є основою). Доведіть, що A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 перетинаються в одній точці.

5. Знайти усі трійки простих чисел p, q, r, для яких виконується рівність:

$$p(p+1) + q(q+1) = r(r+1).$$

30 січня 2011 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації, а також будь-якими електронними засобами забороняється
Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені на сайті www.matholymp.org.ua