Завдання XII обласного турніру юних математиків 2016-2017 н. р.

1. На Олімпійських іграх з хокею за перемогу в основний час присуджують 3 очки, за перемогу в додатковий час — 2 очки, за поразку в додатковий час — 1 очко, а за поразку в основний час — 0 очок. Дванадцять команд грають між собою турнір в одне коло.

   а) Яку найменшу кількість очок може набрати команда-переможець турніру?

   б) Яку найбільшу кількість очок може набрати команда, що зайняла останнє місце?

2. У Буратіно є 2016 золотих. Карабас Барабас пропонує йому зіграти в музичне казино з виконанням трьох пісень. Перед кожною з пісень Буратіно ставить якусь кількість золотих на кін і намагається вголос вгадати, хто буде співати наступну пісню: Карабас Барабас або Дуремар. Ті чують прогноз Буратіно і після цього обирають, хто буде співати. Якщо Буратіно вгадує, то поставлена сума подвоюється і повертається Буратіно. В іншому випадку Карабас Барабас і Дуремар забирають її собі. Умовою гри передбачено, що Дуремар буде співати більше пісень, аніж Карабас Барабас. Який найбільший гарантований виграш може забезпечити собі Буратіно?

3. Послідовності (x_n) та (y_n) натуральних чисел такі, що

   $$x_1 = y_1 = 1; \quad x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \quad y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}, \; n \geq 2.$$

   Для кожного натурального n обчисліть значення виразу $2x_n^2 - y_n^2$ та запропонуйте, як скористатися отриманим результатом для наближеного обчислення числа $\sqrt{2}$.

4. Для натуральних чисел $n = 2$ та $n = 3$ доведіть нерівність

   $$\sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} - \ldots + \sqrt{\frac{4n-3}{n}} - \sqrt{\frac{4n-2}{n}} + \sqrt{\frac{4n-1}{n}} > 1.$$

   Чи справджується така нерівність для $n = 12$?

5. Розв’яжіть рівняння $2^x = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1.$

6. Знайдіть усі трійки натуральних чисел $x > y > z$, для яких справджуються рівності:

   а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2016$, б) $x^3 + y^3 + z^3 = 2016$.

7. Піфагорова трійка $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ має таку властивість: x, y — два послідовні натуральні числа. Чи існують ще такі трійки? Якщо так, то скільки їх існує — скінченна чи нескінченна кількість?

8. Чи можна заповнити цілими числами таблицю 6×6 так, щоб сума всіх чисел у кожному квадраті 3×3 цієї таблиці дорівнювала 2016, а сума всіх чисел у кожному квадраті 5×5 таблиці дорівнювала 2015 ?

9. Розв’яжіть у натуральних числах k, l, m рівняння $1 + 2^k + 2^{k+l} = 5^m$.

10. Для кожного дійсного значення параметра a розв’яжіть нерівність $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$.

11. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC вибрали точки K та N такі, що $\frac{BN}{AK} = tg^2 A$. Доведіть, що ортоцентр трикутника BCK збігається з ортоцентром трикутника ACN.

12. У нерівнобедреному трикутнику ABC, в якому $\angle BAC = 120^\circ$, провели бісектрису AL, медіану AM і відмітили центр O описаного кола. Прямі OL та AM перетинаються в точці K. Доведіть, що $\angle BKC = 60^\circ$.

13. Послідовність (u_n), у якій $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $n \geq 2$, називається послідовністю чисел Фібоначчі. Дослідіть, чи існують такі натуральні числа $m \geq 2$, що сума будь-яких m послідовних чисел Фібоначчі ділиться на m.

14. Розв’яжіть у цілих числах рівняння $\sqrt{x^3 - 3xy^2 + 2y^3} = \sqrt[3]{13x + 8}$.

15. У футбольному турнірі «на виліт» грає 64 команди із рівнями гри від 1 до 64 (усі команди мають різний рівень гри; матч між двома командами завжди виграє команда з вищим рівнем гри). Спершу команди розбивають на 32 пари і ці пари грають між собою, потім 32 переможців розбивають на 16 пар, які грають між собою, і т. д., поки не залишиться єдина команда — переможець турніру. *Видовищністю матчу* між двома командами назвемо модуль різниці рівнів цих команд, *видовищністю турніру* назвемо суму видовищностей усіх проведених ігор. Знайдіть найменше і найбільше можливі значення видовищності турніру.

16. У шаховому турнірі змагалися 5 шахістів: A, B, C, D, E. Турнір проходив у декілька кіл (кожен із кожним зіграв одну й ту саму кількість партій). Відомо, що всі учасники набрали різну кількість очок і за кількістю очок розташувались у порядку ABCDE (за перемогу нараховується 1 очко, за нічию — $1/2$, за поразку — 0). Відомо також, що за кількістю здобутих перемог вони розташувались у зворотному порядку: EDCBA, тобто найбільшу кількість перемог здобув E, учасник D здобув перемог менше за E, проте більше за C тощо. Доведіть, що не менше 15 партій завершились унічию.

17. За допомогою циркуля та лінійки відновіть трикутник ABC за такими трьома точками: точкою M перетину його медіан, точкою I – центром його вписаного кола і точкою Q_a дотику вписаного кола до сторони BC.

18. Андрійко та Миколка грають у таку гру. Андрійко вибирає 2016 точок на проміжку $(0,\infty)$. Миколка довільним чином фарбує кожну з них у синій або зелений колір. Після цього Андрійко вибирає додатне число a і фарбує проміжки $(0,a)$, $(2a,3a)$, $(4a,5a)$, ... у синій колір, а проміжки $(a,2a)$, $(3a,4a)$, $(5a,6a)$, ... — у зелений. Якщо кожна з вибраних на початку гри Андрійком точок належатиме інтервалу того ж самого кольору, то виграє Андрійко. В іншому випадку переможцем буде Миколка. Чи може хтось із гравців забезпечити собі перемогу?

19. Послідовність невід’ємних дійсних чисел (x_n) є такою, що для всіх натуральних n

$$x_{n+3} \le \frac{x_n + x_{n+1} + x_{n+2}}{3}.$$

Доведіть, що ця послідовність має скінченну границю.

20. Знайдіть усі пари цілих чисел x та y, для яких

$$\left[\frac{x^2 - y^3}{x + y^2}\right] = 1 + x - y.$$

(Тут $[a]$ – ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a.)

Примітка. При підготовці доповіді звернути увагу на:

- аналіз моделі та етапів розв’язування задачі;
- методи реалізації цих етапів;
- безпосереднє розв’язування задачі;
- висновки та узагальнення.

Для узагальнень окремих задач рекомендується використати умови завдань заключного етапу XIX Всеукраїнського турніру юних математиків.