Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

## Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

**LІІ Всеукраїнська олімпіада юних математиків. ІІІ етап**

**Розв’язання завдань другого туру**

**7 клас**

**Середній рівень**

**1.**Відомо, що олівець та ручка разом коштують більше, ніж один зошит, а олівець та зошит разом — більше, ніж три ручки. Що дорожче — олівець чи ручка?

*Відповідь:* Олівець дорожчий за ручку. Замінюючи в другому твердженні зошит на олівець та ручку, отримуємо, що два олівця та ручка дорожчі за три ручки.

**2.** Дано 11 монет, серед яких 5 справжніх (однакових за вагою) та 6 фальшивих. Фальшиві монети можуть відрізнятися за вагою одна від одної, бути легшими або важчими за справжні (але обов’язково відрізняються за вагою від справжніх монет). Як з допомогою терезів з двома чашками без гирьок виявити хоча б одну фальшиву монету?

*Розв’язання*. Навмання вибираємо монету А. Порівнюємо її з кожною іншою. Якщо кількість рівних їй за вагою монет відмінна від 4, монета А є фальшивою. Якщо ця кількість рівна 4, то відкладаємо виявлені 5 рівних за вагою монет, і беремо монету Б серед інших. Порівнюємо Б з усіма іншими залишеними. Якщо ця кількість не рівна 4, то Б фальшива. Якщо дорівнює 4, відкладаємо Б і рівні їй за вагою монети. Остання монета, що залишилася, точно є фальшивою.

**3**. Квадрат 11×11 розбито на частини розмірами 4×4, 1×3 та 3×1 (не обов’язково всі ці розміри частин зустрічаються в розбитті). Доведіть, що знайдеться хоча б один рядок початкового квадрату, що перетинає непарну кількість з цих частин.

*Розв’язання*. Оскільки рядок початкового квадрата містить непарну кількість клітинок, він буде перетинати непарну кількість частин 1×3 та 3×1. Якщо твердження задачі невірне, то кожен рядок має перетинати непарну кількість частин 4×4, тобто одну. Таким чином, один квадратик 4×4 буде лежати в перших чотирьох рядках, один — в чотирьох наступних, і ми не зможемо «вмістити» потрібний один квадратик в три нижні рядки.

**4.** Нехай  позначає суму цифр десяткового запису натурального числа . Про натуральне число  відомо, що , а . Знайдіть усі можливі значення .

*Розв’язання.* Нехай , де , , …, ,  – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що  є сума одного числа , двох чисел  і одного числа . Якщо додавати ці числа порозрядно в стовпчик:



то в кожному розряді суми, починаючи з другого і закінчуючи передостаннім, буде сума двох цифр попереднього розряду, однієї цифри цього розряду і однієї цифри наступного розряду числа . Якщо при цьому не буде переносів у наступні розряди, то кожна цифра числа  додається  рази, і сума цифр числа  дорівнює . Якщо при цьому буде хоча б один перенос, то сума цифр числа , очевидно, зменшиться (бо тоді із одного розряду суми віднімається ,  або , а до наступного додається відповідно тільки ,  або ), тобто у цьому випадку . Оскільки за умовою задачі , то це означає, що переносів не було, тобто усі цифри числа  не перевищують .

Отже, , тобто без переносів додаємо в сумі



, а  . *Відповідь.* .

**8 клас**

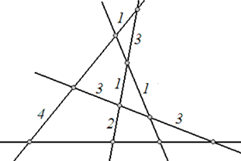
**Середній рівень**

**1.** На дошці написано натуральне число. Кожної хвилини Андрійко дивиться на годинник і додає до написаного числа число хвилин на годиннику (ціле значення від 0 до 59 включно). Доведіть, що колись на дошці буде написане складене число.

*Розв’язання*. В першому, третьому, п’ятому і т.д. записаних числах буде почергово змінюватись парність (адже сума двох послідовних кількостей хвилин непарна). Серед них будуть з‘являтися парні числа. При цьому лише перше з них може дорівнювати 2 (отримане як 0+2 або 1+1), наступні парні числа більші за 2, і тому складені.

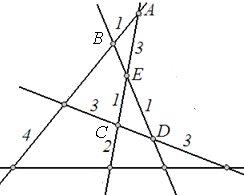
**2.** Квадрат 11×11 розбито на частини розмірами 4×4, 1×3 та 3×1 (не обов’язково всі ці розміри частин зустрічаються в розбитті). Доведіть, що знайдеться хоча б один рядок початкового квадрату, що перетинає непарну кількість з цих частин.

*Розв’язання*. Оскільки рядок початкового квадрата містить непарну кількість клітинок, він буде перетинати непарну кількість частин 1×3 та 3×1. Якщо твердження задачі невірне, то кожен рядок має перетинати непарну кількість частин 4×4, тобто одну. Таким чином, один квадратик 4×4 буде лежати в перших чотирьох рядках, один — в чотирьох наступних, і ми не зможемо «вмістити» потрібний один квадратик в три нижні рядки.

**3.** П’ять прямих попарно перетинаються (див. рисунок). 

Відомо, що всі довжини відрізків, отриманих при перетині прямих, є натуральними числами. Чи можливо отримати вказані довжини відрізків такими, як це дано на рисунку? Відповідь обґрунтуйте.

*Розв’язання*.



Оскільки довжина *CD* має бути натуральним числом, і є меншою за *CE*+*ED*=2, отримуємо *CD*=1. Аналогічно в трикутнику *ABE* довжина *BE* буде більшою за 2 і меншою за 4, і тому *BE*=3. Оскільки трикутник *CDE* — рівносторонній, маємо ∠*CED*=60º, звідки∠*BEA*=60º. Звідси і з рівності *BE*=*AE* тоді ми отримуємо, що всі кути трикутника *ABE* дорівнюють 60º. Це суперечить тому, що *AB* ≠ *AE*.

**4.** Дано квадратний тричлен . Двоє грають у таку гру. Вони ходять по черзі. За один хід гравець може відняти від наявного многочлена один із таких многочленів: , ,  чи . Програє гравець, після ходу якого одержується многочлен з цілочисельним коренем. Хто може забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник?

*Розв’язання*. Доведемо, що виграє перший гравець. Він може ходити так, щоб після його ходу вільний член одержаного многочлена був непарним, а коефіцієнти при  та  мали однакову парність. Тоді після ходів першого гравця будуть з’являтися квадратні тричлени, які у цілих точках приймають лише непарні значення, а тому не матимуть цілих коренів. Діючи саме так, перший гравець не програє.

Відмітимо, що з кожним ходом сума коефіцієнтів одержаного многочлена зменшується на . Отже, через декілька ходів ця сума стане рівною , тобто одержаний многочлен, з такою сумою коефіцієнтів, матиме корінь . Це означатиме, що саме тоді гра закінчиться і виграє перший гравець.

Стратегія для першого гравця може бути такою: перший віднімає , а далі повторює ходи другого.

**9 клас**

**Середній рівень**

**1.** Про функції  і  відомо, що

 і 

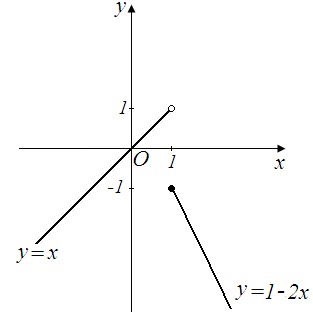
Побудуйте графік функції .

*Розв’язання*. Оскільки при  значення функції , а при  значення , то це означає, що  при усіх дійсних . Тоді, за означенням функції , матимемо, що , тобто.

Таким чином,



а тому, графік функції  має вигляд:



**2.** Чи можна записати цілі числа  у вершинах правильного восьмикутника (по одному біля кожної вершини) так, щоб сума чисел біля будь-яких трьох послідовних вершин восьмикутника була більшою: а) 11; б) 12?

*Розв’язання*. **1.** Чи можна записати цілі числа  у вершинах правильного восьмикутника (по одному біля кожної вершини) так, щоб сума чисел біля будь-яких трьох послідовних вершин восьмикутника була більшою: а) ; б)  ?

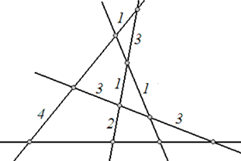
*Розв’язання*.

а)

У цьому пункті умова задачі виконується, наприклад, якщо , , , , , , , .

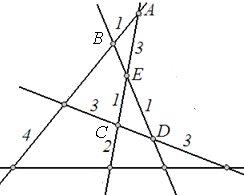
б)

Доведемо, що потрібного розміщення заданих чисел не існує. Припустимо, що це не так. Числа  і  не можуть бути записаними на сусідніх вершинах, інакше зліва і справа від них повинно бути записаним лише число , що неможливо. Далі, не порушуючи загальності, можна вважати, що , тоді  і , або  і . Тоді, для обох цих випадків, однозначно . Далі, розглянувши чотири випадки для розташування , одержимо, що  знову повинно з’явитися, що дає суперечність. *Відповідь.*  Можна;  Не можна.

**3.** П’ять прямих попарно перетинаються (див. рисунок). 

Відомо, що всі довжини відрізків, отриманих при перетині прямих, є натуральними числами. Чи можливо отримати вказані довжини відрізків такими, як це дано на рисунку? Відповідь обґрунтуйте.

*Розв’язання*.



Оскільки довжина *CD* має бути натуральним числом, і є меншою за *CE*+*ED*=2, отримуємо *CD*=1. Аналогічно в трикутнику *ABE* довжина *BE* буде більшою за 2 і меншою за 4, і тому *BE*=3. Оскільки трикутник *CDE* — рівносторонній, маємо ∠*CED*=60º, звідки∠*BEA*=60º. Звідси і з рівності *BE*=*AE* тоді ми отримуємо, що всі кути трикутника *ABE* дорівнюють 60º. Це суперечить тому, що *AB* ≠ *AE*.

**4.** Дано квадратний тричлен . Двоє грають у таку гру. Вони ходять по черзі. За один хід гравець може відняти від наявного многочлена один із таких многочленів: , ,  чи . Програє гравець, після ходу якого одержується многочлен з цілочисельним коренем. Хто може забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник?

*Розв’язання*. Доведемо, що виграє перший гравець. Він може ходити так, щоб після його ходу вільний член одержаного многочлена був непарним, а коефіцієнти при  та  мали однакову парність. Тоді після ходів першого гравця будуть з’являтися квадратні тричлени, які у цілих точках приймають лише непарні значення, а тому не матимуть цілих коренів. Діючи саме так, перший гравець не програє.

Відмітимо, що з кожним ходом сума коефіцієнтів одержаного многочлена зменшується на . Отже, через декілька ходів ця сума стане рівною , тобто одержаний многочлен, з такою сумою коефіцієнтів, матиме корінь . Це означатиме, що саме тоді гра закінчиться і виграє перший гравець.

Стратегія для першого гравця може бути такою: перший віднімає , а далі повторює ходи другого.

**10 клас**

**Середній рівень**

1. Знайдіть усі дійсні , для яких виконується рівність *.*

(Тут запис означає дробову частину числа .)

*Розв’язання.* Очевидно, . Доведемо таку властивість дробової частини дійсних чисел: *для будь-якого дійсного і натурального виконується рівність*

*.*

*Доведення****.*** Маємо

що і треба було довести.

Таким чином, вихідне рівняння еквівалентне такому

або . Оскільки , то буде цілим тоді й тільки тоді, коли З іншого боку, якщо має такий вигляд, то і , тому . *Відповідь.* де

**2.** Про натуральне число  відомо, що сума його цифр дорівнює 404, а сума цифр числа дорівнює 2011. Знайдіть усі значення, яких може набувати сума цифр числа . Відповідь обґрунтуйте.

*Розв’язання.* Нехай , де , , …, – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що є сумою двох чисел , одного числа та двох чисел . При додаванні цих чисел в стовпчик:

якщо не відбувається переносів в наступний разряд, то сума цифр утвореного числа, як неважко помітити, у 5 разів більша за суму цифр числа . При перенесенні однієї одиниці у старший разряд сума цифр зменшується на 9. Тому, оскільки , то в старший розряд було перенесено одиницю. Тому при додаванні двох чисел , одного числа та одного числа (тобто при множенні на 2011) в старші розряди або було перенесено одну одиницю, або нічого, що дає наступні можливості для значення суми цифр числа : , . Покажемо, що обидва ці значення можуть бути реалізованими. Покладемо . Тоді сума цифр кожного з чисел , становить 404, сума цифр кожного з чисел , становить 2011, а суми цифр чисел та дорівнюють відповідно 1616 та 1607. *Відповідь.* 1607, 1616.

**3.** На сторонах і трапеції обрано відповідно такі точки і , що . Доведіть, що точки і рівновіддалені від точки перетину діагоналей трапеції.

*Розв’язання.* Нехай точка симетрична точці відносно прямої . Тоді , тому точки , і лежать на одній прямій. За теоремою синусів , тому . Нехай – точка перетину діагоналей трапеції . З подібності трикутників і маємо, що . Таким чином, , тому трикутники і подібні, звідки . Аналогічно , що й треба довести.

**4.** На дошці записані (в такому порядку) два числа і . Андрійко ліворуч від пише число , після чого витирає число . Потім він робить таку саму операцію з утвореною парою чисел, і так далі. а) Якщо , а , які числа буде написано на дошці після 2012 таких операцій? б) За яких значень і всі числа, які одержить Андрій, будуть натуральними? Відповіді обґрунтуйте.

*Розв’язання.* Розглянемо перетворення . Легко перевірити, що п’ять послідовних виконань цього перетворення дає такі результати:

Таким чином, перетворення таке, що для будь-яких .

а) Оскільки , то скориставшись поміченою властивістю перетворення , одержуємо, що Андрійко після 2012 операцій одержить числа та .

б) Щоб одержана після однієї операції пара чисел була натуральною, необхідно і достатньо, щоб , де – натуральне. Щоб одержані після двох операцій числа були натуральними, треба, щоб було натуральним. Тоді , тобто . З цієї нерівності випливає, що або , або і , або і . Якщо , то з того, що натуральне, одержуємо, що або , звідки або . Якщо і , то . Якщо і , то . Якщо і , то . Легко бачити, що , тому всі знайдені пари чисел справді мають бажану властивість.

*Відповідь.* а) та ; б) .

**11 клас**

**Середній рівень**

**1.**Знайдіть усі дійсні , для яких виконується рівність *.* (Тут запис означає дробову частину числа .)

*Розв’язання.* Очевидно, . Доведемо таку властивість дробової частини дійсних чисел: *для будь-якого дійсного і натурального виконується рівність*

*.*

*Доведення****.*** Маємо

що і треба було довести.

Таким чином, вихідне рівняння еквівалентне такому

або . Оскільки , то буде цілим тоді й тільки тоді, коли З іншого боку, якщо має такий вигляд, то і , тому . *Відповідь.* де

**2.** Нехай і – такі гострі кути, що . Доведіть, що .

*Розв’язання.* Без обмеження загальності можна вважати, що . Оскільки зростає при , та , то . Запишемо

Останній вираз додатній, оскільки .

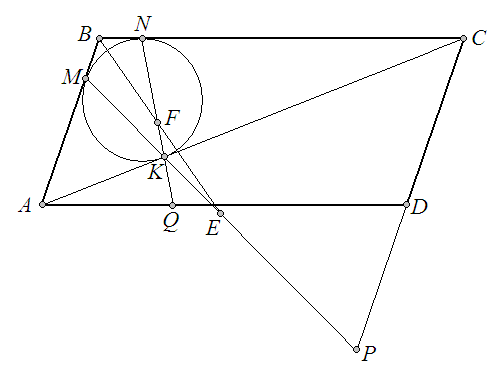
**3.** Про натуральне число  відомо, що сума його цифр дорівнює 404, а сума цифр числа дорівнює 2011. Знайдіть усі значення, яких може набувати сума цифр числа . Відповідь обґрунтуйте.

*Розв’язання.* Нехай , де , , …, – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що є сумою двох чисел , одного числа та двох чисел . При додаванні цих чисел в стовпчик:

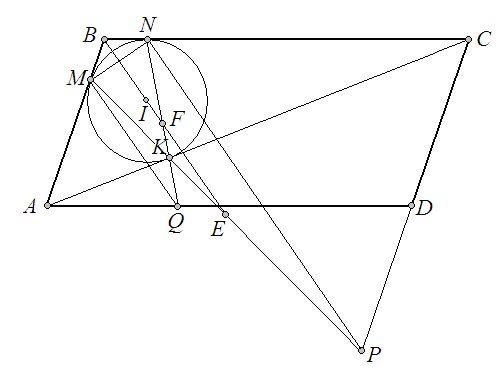
якщо не відбувається переносів в наступний разряд, то сума цифр утвореного числа, як неважко помітити, у 5 разів більша за суму цифр числа . При перенесенні однієї одиниці у старший разряд сума цифр зменшується на 9. Тому, оскільки , то в старший розряд було перенесено одиницю. Тому при додаванні двох чисел , одного числа та одного числа (тобто при множенні на 2011) в старші розряди або було перенесено одну одиницю, або нічого, що дає наступні можливості для значення суми цифр числа : , . Покажемо, що обидва ці значення можуть бути реалізованими. Покладемо . Тоді сума цифр кожного з чисел , становить 404, сума цифр кожного з чисел , становить 2011, а суми цифр чисел та дорівнюють відповідно 1616 та 1607. *Відповідь.* 1607, 1616.

**4.** У паралелограмі провели діагональ . Вписане коло трикутника дотикається до його сторін , і відповідно у точках , і . Пряма перетинає пряму у точці , а пряма перетинає пряму у точці . Нехай і – середини відрізків і . Доведіть, що точки , і лежать на одній прямій.

*Розв’язання.* За теоремою про дотичні, маємо і , тобто трикутники , і – рівнобедрені. Звідси випливають наступні рівності кутів: і .



Далі, і як внутрішньо різносторонні при паралельних перетнутих третьою прямою. Крім того, і як вертикальні. Отже, і , тобто трикутники і – рівнобедрені. Звідси випливає, що і , тобто трикутники і – рівнобедрені (див. другий малюнок).



Нехай – центр кола, вписаного в трикутник , тоді – серединний перпендикуляр відрізка і бісектриса кута . З рівнобедреності трикутника випливає , тобто . Аналогічно доводиться, що .

Таким чином, з того, що і проходить через середину , то за теоремою Фалеса проходить через середини відрізків і , що і завершує доведення.