**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики. 2018 рік**

1. **клас**

**1.Кілограм пломбіру на 4 грн дорожчий від кілограма шоколадного морозива. Сергій і Петро замовили по 300 г морозива, до того ж Сергій замовив пломбіру вдвічі більше, ніж шоколадного морозива, а Петро - того й іншого порівну. В кого замовлення дорожче і на скільки?**

Відповідь. У Сергія на 20 к.

Вказівки. Сергій замовив 200 г пломбіру та 100 г шоколадного морозива, а Петро – по 150 г морозива кожного виду. Тобто Петро замість 50 г пломбіру замовив 50 г шоколадного морозива. Оскільки 1 кг пломбіру на 4 грн дорожчий за 1 кг шоколадного морозива, то 50 г пломбіру на (400:20)=20 к. дорожче за 50 г шоколадного морозива.

**2.На 1000 грн. придбали 100 птахів трьох видів. Індичка коштує 100 грн., гусак - 30 грн., курча - 5 грн. Скільки придбали індичок?**

Відповідь. 5 індичок

Вказівки. Позначимо через *х* кількість придбаних індичок, через *у* - кількість гусаків. Тоді (100-*х*-*у*) – кількість придбаних курчат. За умовою, маємо 100*х*+30*у*+5(100-*х*-*у*)=1000 або 19*х*+5*у*=100. Оскільки *х* і *у*- натуральні числа, то х діляться на 5. Одержане рівняння задовольняє тільки *х*=5.

**3Скільки існує різних прямокутників, довжини сторін яких є цілими числами та периметр і площа яких виражені однаковим числом?**

Відповідь.2

Вказівки. Якщо *х* і *у* – довжини сторін прямокутника, то , за умовою, *ху*=2*х*+2*у* або (*х*-2)(*х*-2)=4. Звідси *х*=*у*=4 або *х*=6, *у*=3 (*х*=3, *у*=6 дає рівний попередньому прямокутник).

4**.Учитель задав на уроці «хитру» задачу. Кількість хлопців, що її розв’язали, дорівнює кількості дівчат, що її не розв’язали. Кого більше в класі – тих, хто розв’язав задачу, чи дівчат?( Апостолова)**

Вказівки. Позначте: кількість хлопців, які розв’язали задачу як, а не розв’язали – як ; кількість дівчат, що розв’язали задачу як , а не розв’язали . Тоді за умовою, =, тому +=+.

**5.Середній вік футболістів команди «Бий по ногах» - 30 років. Гравці команди по черзі виходять на поле. Після виходу на поле першого футболіста середній вік гравців, які не вийшли на поле, став 29 років. Після виходу на поле другого футболіста середній вік тих що не вийшов на поле, став 28 років, і так далі. Після на виходу на поле кожного наступного гравця середній вік гравців зменшувався на один рік. Скільки років найстаршому і наймолодшому гравцям цієї відомої команди?**

Відповідь.40 років, 20 років.

Вказівки. Позначимо кожного футболіста команди **

Оскільки середній вік одинадцяти футболістів команди становить

30 років, то **

Після виходу на поле першого футболіста**середній вік гравців став 29 років, тобто**. Тоді найстаршому футболісту 330-290= 40 років.

Після виходу на поле другого футболіста ** середній вік гравців став 28 років, тобто *.* Тоді наступному за віком гравцю 290-252+38 років.

Після виходу на поле другого футболіста ** середній вік гравців став 27 років, тобто *.* Тоді наступному за віком гравцю 252-216=36 років.

**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.2018 рік**

1. **клас**

1. **12 учнів народилися в різні місяці одного року. Перемноживши номер місяця на число дня народження, дістали: Іван – 49, Петро – 3, Роман – 52, Михайло – 130, Дмитро – 143, Андрій – 300, Віктор – 14, Семен – 42, Віталій – 81, Сергій – 135, Володимир – 128, Василь – 153. Хто з хлопців народився в якому місяці?**

Відповідь. Петро – 1, Віктор– 2, Віталій – 3, Роман– 4, Сергій – 5, Семен – 6, Іван – 7, Володимир – 8, Василь – 9, Михайло – 10, Дмитро – 11, Андрій – 12 (число відповідає номеру місяця).

Вказівка. Іван: 49=7•7, Петро: 3=3•1, Роман: 52=13•4, Михайло: 130 = 13•10, Дмитро: 143=13•11, Андрій 300=25•12, Віктор: 14=7•2, Семен: 42 =7• 6, Віталій: 81= 27•3, Сергій: 135=27•5, Володимир: 128=8•16, Василь: 153=17 • 9.

2.**На малюнку зліва зображено куб, а на малюнку справа – його розгортку. Намалюйте задану розгортку, вказавши на ній літери і у правильному положенні.**

****

3.**У слюсаря Трубопровідного є труби завдовжки 7м і 8м. Допоможіть йому, не вкорочуючи жодну з них, вибрати таку кількість труб, аби прокласти трубопровід завдовжки 130 м.**

Відповідь: 4 по 8 м. і 14 по 7 м.

Вказівка. Позначимо кількість семиметрових труб через - *х*, а кількість восьмиметрових –*у.* Тоді , за умовою задачі, отримаємо рівняння: *7х+8у=130.*

*Оскільки коефіцієнт коло х найменший, то 7х=130-8., .* Щоб рівняння мало натуральні розв’язки вираз 4+6у має ділиться без остачі. Підбором знаходимо у-4, тоді х=14. Отже слюсареві потрібно взяти 4 восьмиметрові труби та 14 семиметрових.

**4**.**Рій бджіл полетіло збирати нектар. 1/3 частина бджіл опустилася на квіти акації, 1/5- на квіти конюшини. Потроєна різниця цих двох чисел полетіла на квіти чебрецю. Одна бджілка залишилася біля вулика, позаяк вона не вирішила, куди їй податися. Скільки бджіл у рої?**

Відповідь. 15

**5.Прямокутник АВСD розділили на квадрати так , як показано на рисунку. Відомо, що сторона АВ=32 см. Знайдіть довжину сторони АD**.



 Відповідь. 29 см.

 Розв’язання.

Позначимо сторону найменшого квадрата як *у*, а сторону наступного за величиною – *х*. Виразимо сторони всіх квадратів через уведені

позначення. Складемо і розв’яжемо рівняння. AB=CD=32 см, тобто 2х+3у+2х=32, 4х+3у=32, **. Підбором знаходимо: х=5см, у=4 см. Тоді AD=2х+х+2х+у=5х+у=29(см).

**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.** **2018 рік**

1. **клас**

 **1.Довести, що при будь-якому цілому  число  ділиться на 24.**

Розв’язання. Позначимо . Тоді дістанемо

.

Число  є добутком чотирьох послідовних чисел і тому ділиться на 8 і 3. Число  ділиться на 24, бо добуток  є парним числом (*n* і *n-3*є числами різної парності). Тому  ділиться на 24.

**2.Знайдіть таке п’ятицифрове число, щоб двоцифрові числа,,, були квадратами натуральних чисел.**

Відповідь. 81649.

Вказівка. Серед двоцифрових чисел квадратами натуральних чисел є :16; 25; 36; 49;64; 81.

**3.Ціну на одну книгу спочатку підвищили на 50% , а потім зменшили на 50%, а на другу – спочатку зменшили на 50%, а потім збільшили на 50%. У результаті різниця між цінами стала дорівнювати 6 грн. Якою була початкова різниця цін?**

Відповідь: початкова різниця цін дорівнює 8 грн.

Вказівка. Нехай *х*, *у* – початкова ціна книг. Тоді .

**4. У квадраті АВСD АD=ВЕ=СЕ. Знайти кут АЕD.**

Відповідь: 30 °, 150 °.

Розв’язання. Трикутник ВСЕ - рівносторонній.

Можливі два випадки розташування кута АЕD.- у середині квадрата і зовні.

У першому випадку <АВЕ = 90 ° +60 ° = 150 °,

 < ВАЕ = <ВЕА = 15 °, <ЕАD = <EDA = 90 ° - 15 ° = 75 °, <AED =

=180 ° - 2 · 75 ° =30 °.

В другому випадку < АВЕ = 90 ° - 60 ° = 30 °,< ВАЕ = <ВЕА = 75 °,

<ЕАD =<EDA =90 ° - 75 ° = 15 °, <AED = 180 ° - 2 · 15 ° = 150 °.

**5. Вовк запросив до себе в гості трьох поросят і Червону Шапочку дивитися мультики. Після перегляду Вовк перерахував кекси на кухні і заявив, що двох не вистачає. Як Вовку за два зважування визначити, хто з'їв кекси?**

**Всі кекси важать однаково, всі поросята (принаймні, коли вони тільки**

 **прийшли в гості) - теж. Також відомо, що Червона Шапочка на дієті, тому могла з'їсти не більше 1 кексу.**

Розв’язання. Очевидно, що іще залишився хоча б один кекс.

 Зважуємо двох поросят. (Поросята відповідно: перше-П1, друге - П2, третє –П3, Червона Шапочка-ЧШ ).

а) Якщо П1 = П2, то можливі випадки:

1) П1 і П2 з'їли по 1 кексу.

 2) П3 з'їв 2 кекси.

3) П3 і ЧШ з'їли по 1 кексу.

Друге зважування: порівнюємо П1 + Кекс і П3. Якщо П1+ К> П3, то 1

випадок, якщо П1 + К = П3, то 3 випадок, якщо П1+ К <П3, то 2 випадок.

б) Якщо П1> П2, то можливі випадки:

1) П1 і П3 з'їли по 1 кексу. 2) П1 з'їв 2 кекси. 3) П1 і ЧШ з'їли по 1 кексу.

Друге зважування: порівнюємо П1 і П3 + К. Якщо П1> П3 +К, то 2

випадок, якщо П1 = П3 +К, то 3 випадок, якщо П1 <П3 +К, то 1 випадок.

**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики. 2018 рік**

1. **клас**

1)**Ціна квитка на стадіон була 200 грн. Після зниження цін на квитки,**

 **кількість глядачів на стадіоні збільшилася на 50%, а виручка з**

**проданих квитків збільшилася на 14%. Скільки став коштувати квиток на стадіон після зниження ціни?**

Відповідь. 152.

Розв’язання. Нехай х - кількість глядачів до зниження ціни, а у - нова ціна

квитка. За умовою задачі 1,14 • 200х = 1,5 xy. Звідси у = 152.

2)**Знайти чотиризначні числа , які дорівнюють .**

 Відповідь. 1681

Розв’язання. *Перший спосіб*. Для знаходження цифр  шуканого числа  матимемо рівняння  яке можна записати так:

 ,

або після спрощення

 . (1)

Права частина цієї рівності ділиться на 25. Отже, на 25 повинна ділитись і ліва частина. Але оскільки , то ліва частина рівності (1) ділитиметься на 25 лише тоді, коли . Підставивши значення  в рівність (1), матимемо

 

Звідси . Оскільки , то права частина цієї рівності буде повним квадратом цілого числа лише тоді, коли. Тоді , а отже, . Таким чином, тільки одне число  задовольняє умову задачі.

*Другий спосіб*. Оскільки , то число  буде чотиризначним лише тоді, коли  дорівнюватиме одному з чисел 7, 8, 9. Якщо , то , якщо , то , а якщо , то . Звідси дістаємо, що умову задачі задовольняє  і шуканим числом буде .

3)**Знайти у натуральних числах,значення *х* та *у*, які б задовольняли рівняння .**

**Вказівка**. .  або 

4. **У трикутнику зі сторонами 6см, 10 см і 12 см вписано коло. До кола проведено дотичну так, що вона перетинає дві більші сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який відтинається дотичною.**

Відповідь: 16 см.

Розв’язання. Виконуємо побудову (див.малюнок). Нехай AB=6 см, AC=10см,BC=12см,DE-дотична до кола. За властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки: EN=EM, ND=KD, CM=CK.



Тоді, ****

****

або****

Оскільки ABED- чотирикутник, описаний навколо кола, то AB+ED=AD+BE.

Із рівності AB=BQ+QA випливає, що AB=BM+AK.

Отже, ****

****

5. **У науковому містечку, населення якого становлять тільки правдолюби, що говорять правду, і брехуни, які завжди брешуть, знаходиться науково-дослідний інститут (НДІ). Кожний із його співробітників зробив одного разу дві заяви: а) в інституті немає і десятка людей, що працюють більше від мене; б) принаймні сто осіб в інституті отримують зарплату більшу, ніж моя. Відомо, що навантаження у всіх працівників різне, як і зарплата. Скільки людей працює в НДІ?**

Відповідь: 110 осіб.

Розв’язання. Розглянемо співробітника, який працює більше всіх інших.

Тоді першою заяві він не збрехав, тобто він - правдолюб. Але тоді і друга його заява – правда , отже, знайдуться 100 чоловік в інституті, які отримують більше нього. Бачимо, що з одного боку перші 10 співробітників, які працюють більше, ніж інші - правдолюби, а решта - брехуни. З іншого боку, 100 співробітників, які отримують більше за інших - брехуни, а решта - правдолюби. Тому всього правдолюбів і брехунів 110.

**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.** **2018 рік**

1. **клас**
2. **Скільки треба взяти доданків суми 1+2+3… +… щоб отримати в сумі трицифрове число що складається з однакових цифр?**

Відповідь. 36

Розв’язання: сума n-доданків, , , -добуток двох послідовних натуральних чисел, . 6*а-*число сусідне з 37 оскільки воно кратне 6, то 6*а*=36.

1. **Спростити вираз: .**

Розв’язання.



**3.Дано круг. Побудувати круг, площа якого була б у десять разів більша від площі початкового круга. Обгрунтувати побудову.**

Вказівка. Нехай радіус даного круга *r* . Тоді радіус шуканого круга .Цей радіус можна знайти як довжину гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами *r* і *3r.*

**4.Дві точки рівномірно рухаються по колу в одному напрямку. Перша точка проходить коло на 4 с швидше , ніж друга і наздоганяє другу точку кожні 24 с. За який час проходить коло друга точка?**

 Відповідь. 12 с.

 Вказівка. Нехай ,-швидкості першої і другої точок відповідно.



,





1. **При яких значеннях *а* різниця коренів рівняння дорівнює 3?**

Відповідь. 

Вказівка. Позначимо корені рівняння і .

Тоді,  де .

Виразимо і  з першого і третього рівняння і підставимо у друге рівняння. Після спрощення отримаємо рівняння .

Розв’язками цього рівняння є 

**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики. 2018 рік**

1. **клас**

**1.Довести , що .**

Вказівки: За формулою 

. 

Але 

Отже, 

**2.Розв’язати в натуральних числах **

 Відповідь: 

Вказівки. Права частина рівняння при парному  ділиться на 4;при непарному  дає остачу 1. Ліва частина при *n >*1 при діленні на 4 дає остачу 3.Тому дане рівняння при n >1 не має розв’язків. Розглянемо n=1, тоді



**3. У десятковому записі цілого числа *A*  всі цифри, крім першої і останньої – нулі, перша і остання – не нулі, кількість цифр – не менша трьох. Довести, що A не є точним квадратом.**

Вказівки. Припустимо, що  – точний квадрат, тоді його остання цифра є  , 4 чи 9. Тоді рівно одне з чисел  і  кратне 5, а значить і  ( – кількість в ), і тому  – отримали суперечність.

**4.У трикутній піраміді сума плоских кутів при кожній вершині основи дорівнює . Площа основи . Знайти повну поверхню піраміди.**

Відповідь. 

Вказівки: Розріжемо піраміду по бічних ребрах і розкладемо бічні грані на площину основи.

.

**5.При яких значеннях  рівняння **

**має єдиний корінь?**

Відповідь. Дане рівняння має єдиний розв’язок при 0<a<1.

Вказівки.

 Позначивши будемо мати квадратне рівняння . .

Його корені .

Рівняння дійсних розв’язків не має,

А рівняння має єдиний розв’язок , якщо 0<*a*<1.

Таким чином, дане рівняння має єдиний розв’язок при 0<a<1.